**หนึ่งปีกว่า ๆ ในชีวิตของปวงกาเร่**

เมื่อวันก่อนอ่าน+แชร์โพส เรื่องคุณอองรี ปวงกาเร่ (Henri Poincaré) เลยนึกถึง youtube อันนี้ที่ได้ดูนานแระ ของคุณ เอเทียน กีส์ (Etienne Ghys) เลยกลับมาดูใหม่และจด ๆ ไว้เผื่อมีคนสนใจ

อองรี ปวงกาเร่ เกิดปี 1854 ในครอบครัวหรูที่ นองซี่ (Nancy) จบ École Polytechnique (ที่เป็นสุดยอดสถานศึกษาที่ฝรั่งเศสแข่งกับ École Normale Supérieure) และได้ตำแหน่งวิศวกรเหมืองแร่ที่เมือง Vesoul โดยระหว่างนั้นเขาก็ทำ ป.เอก คณิตศาสตร์ไปด้วย ปวงกาเร่ defense วิทยานิพนธ์ 1 ส.ค. 1879 หลังจากนั้นเขาก็ได้ตำแหน่งอาจารย์ที่เมือง Caen

จากรายงานของ Gaston Darboux ที่เป็น Rapporteur (ผู้ตรวจวิทยานิพนธ์อย่างละเอียด) ของเขา ซึ่งก็เป็นนักคณิตศาสตร์ชั้นนำเช่นกัน ดูเหมือนว่าจะเป็นวิทยานิพนธ์ที่ไม่น่าสนใจนัก  
วิทยานิพนธ์ของปวงกาเร่ถูกตีพิมพ์หลังเขาเสียชีวิตลง และต้องรอหลังจากนั้นอีกนานกว่าเราจะเข้าใจงานวิทยานิพนธ์ของเขาทั้งหมด

เรื่องที่จะเล่านี้เกิดในช่วง 1 พ.ค. 1880 จนถึง 8 ส.ค. 1881 เป็นช่วงที่ปวงกาเร่ในวัยหนุ่มพึ่งเริ่มอาชีพนักวิจัย เรื่องนี้เริ่มตอนที่ปวงกาเร่ได้อ่านบทความของคุณ Fuch  
แต่ก่อนที่เราจะมาดูเรื่องนี้ ต้องมีการปูพื้นบางอย่างก่อนนั่นคือทฤษฎีของคุณกาลัว จำนวนเชิงซ้อน และกรุ๊ป

กาลัวและความกำกวม

เอวาริสต์ กาลัว (Evariste Galois) เกิดปี 1811 และเสียชีวิตในปี 1832 ในอายุเพียง 20 ปี จากการดวลปืน ชีวิตของกาลัวนั้นดราม่ามากทั้งตอนสมัครเข้าเรียน โดนไล่ออกจากโรงเรียนเพราะเรื่องการเมือง ติดคุก และพอออกมาก็เสียชีวิตเพราะดวลปืนเรื่องผู้หญิง

กาลัวมีเวลาศึกษาคณิตศาสตร์สั้นมาก อย่างมากน่าจะ 5 ปี แต่ในช่วงเวลาสั้น ๆ นี้ กาลัวได้อธิบายว่าทำไมเราจึงไม่มีสูตรในการแก้สมการกำลัง 5 ขึ้นไป แนวความคิดของกาลัวนี้ได้กลายเป็นพื้นฐานของทฤษฎีกรุ๊ปในปัจจุบัน

วันก่อนการดวล กาลัวได้เขียนจดหมายลาถึงเพื่อนเขา เพราะกาลัวเดาว่าเขาคงตายจากการดวลแน่นอน ในจดหมายนั้นมีข้อสั่งเสีย มีการบ่นเรื่องความเป็นไปของสังคมในยุคนั้นที่ไม่ค่อยถูกใจกาลัว และคณิตศาสตร์ที่เขากำลังทำอยู่ หนึ่งในนั้นคือประโยคนี้

Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l’application à l’analyse transcendante de la théorie de l’ambiguïté  
ช่วงหลังนี้สมาธิผมจดจ่ออยู่ที่การประยุกต์ใช้ทฤษฎีความกำกวมในการวิเคราะห์อดิศัย

หมายเหตุ จำนวนอดิศัย หรือ transcendental number คือจำนวนที่ไม่ได้เป็นรากของพหุนามใด ๆ  
เท่าที่ผมเข้าใจเราตีความอีกแบบได้คือเป็นจำนวนที่เราไม่สามารถสร้างจำนวนนี้ได้ด้วยไม้บรรทัดและวงเวียน เดิมเราเชื่อว่าจำนวนใด ๆ นั้นสามารถเชื่อมกับโลกแห่งความเป็นจริงได้เสมอ วิธีง่าย ๆ คือผ่านกระบวนการสร้างด้วยไม้บรรทัดและวงเวียน สำหรับจำนวนอดิศัย เช่น ค่า π และ e นั้นเราไม่สามารถสร้างได้ด้วยวิธีนี้ นั้นคือการมีอยู่ของจำนวนพวกนี้ไม่ขึ้นกับความเป็นจริงของเรา หรือการมีอยู่ของจำนวนพวกนี้มัน transcend (= [to rise above or go beyond the limits of …](https://www.merriam-webster.com/dictionary/transcend)) ความเป็นจริงของเรา

สิ่งที่แปลกข้างบนไม่ใช่เรื่องการวิเคราะห์อดิศัย แต่เป็นเรื่องทฤษฎีความกำกวม ตั้งแต่เด็ก ๆ เรามักได้ยินว่าคณิตศาสตร์เป็นอะไรที่เป๊ะ ๆ แล้วเราจะมีความกำกวมในคณิตศาสตร์ได้อย่างไร?

เพื่อเข้าใจเรื่องนี้ลองดูสามเหลี่ยมด้านเท่าข้างล่างนี้

ปกติตอนเราเรียนเราก็มักตั้งชื่อมุมทั้งสามเพื่อความสะดวกในการเรียกชื่อ แต่เราจะตั้งชื่อไงดีระหว่าง ABC, ACB, BAC, BCA, CAB หรือ CBA ทั้ง 6 วิธีล้วนแล้วแต่ใช้ได้หมด เพราะมุมทั้งสามมีความสมมาตรกัน ทำให้เกิดความกำกวมในการเรียกชื่อ

อีกตัวอย่างหนึ่งคือลายของอิฐปูพื้น เช่น

จินตนาการว่าทางเท้าที่เราเดินมีอิฐแบบนี้ปูอยู่ ถ้าเราบอกว่ามีมดอยู่บนทางเท้านี้ คนฟังคงงงว่าตรงไหนเพราะอิฐทุก ๆ อันมันดูเหมือนกันหมด จะนับแนวตั้งแนวนอนก็ดูยากเพราะมันดูสมมาตรแบบหมุนได้ด้วย เราคงต้องลงไปชี้เพื่อระบุตำแหน่งที่แน่นอน  
ในตัวอย่างนี้ ความกำกวมก็เกิดจากความสมมาตรเช่นกัน ทั้งสมมาตรจากการเลื่อน และการหมุน

สำหรับฟังก์ชันคณิตศาสตร์เช่น กำลังสอง เรารู้ว่ากราฟของมันมีความสมมาตรในแกนตั้ง เช่น (-2)² = 2² ถ้าเราพับกราฟลงมาเพื่อดูฟังก์ชันผกผันของมัน (inverse function) นั่นคือ ฟังก์ชันรากที่สอง เราก็จะพบกับความกำกวม หากเราสนใจรากที่สองของ 4 เรามีได้ 2 คำตอบคือ 2 และ -2 เป็นต้น

จำนวนเชิงซ้อน

เรื่องที่สองที่ต้องปูพื้นคือจำนวนเชิงซ้อน (complex number)

เราได้เรียนตอน ม.ปลาย ว่าจำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วยสองส่วนคือส่วนจำนวนจริง และส่วนของจำนวนจินตภาพ ซึ่งเกิดจากการเอาจำนวนจริงคูณกับ i ที่เป็นรากที่ 2 ของ -1  
ในยุคของกาลัวนั้นจำนวนจินตภาพพึ่งเริ่มแพร่หลาย แต่ในยุคของปวงกาเร่เมื่อพูดถึงจำนวนใด ๆ นักคณิตศาสตร์จะนึกถึงจำนวนเชิงซ้อนก่อนเสมอ

เราสามารถนิยามการคำนวณบวก ลบ คูณ หาร กับจำนวนเชิงซ้อนได้  
นอกจากนี้เรามักจะนำเสนอจำนวนเชิงซ้อนในรูปของกราฟ 2 มิติ โดยแกนนอนคือจำนวนจริง แกนตั้งคือจำนวนจินตภาพ  
เช่น การบวกเชิงซ้อนคือการเลื่อนตำแหน่งบนกราฟนี้

คราวนี้ลองยกกำลัง 2  
ในตัวอย่างนี้คุณ Ghys เอาตำแหน่งบนรูปปวงกาเร่ไปยกกำลังสอง แล้วเอาค่าสีของตำแหน่งเดิม (z) ไปวางที่ตำแหน่งใหม่ (z²)  
สังเกตว่าตำแหน่งการวางรูปเดิมมีผลต่อภาพที่ได้หลังยกกำลังสอง  
มีเพียงจุดที่ตำแหน่ง 0 หรือ origin ที่ไม่เปลี่ยน เรียกว่าจุดวิกฤต

คราวนี้ลองถอดรากบ้าง  
ในตัวอย่างนี้คุณ Ghys เอาตำแหน่งในกราฟด้านซ้ายไปยกกำลังสอง หรือ สาม ถ้าตกที่จุดไหนในรูปขวาก็เอาสีพิกเซลนั้นมาวาง

ทฤษฎีกาลัว

เราได้เห็นว่าในการวิเคราะห์ของกาลัว ฟังก์ชันถอดราก นั้นมีความกำกวม ในตอนนี้เราอยากดูว่าเราสามารถแสดงความกำกวมนั้นบนระนาบเชิงซ้อนนี้ได้หรือไม่

ในรูปนี้จุดสีเขียวและจุดสีแดงด้านซ้ายเป็นรากของจุดสีแดงด้านขวา เมื่อจุดแดงด้านขวาหมุนรอบจุดวิกฤต 1 รอบ จุดแดงและเขียวในด้านซ้ายหรือรากทั้งสองจะสลับที่กัน  
ถ้าเราหมุนรอบจุดวิกฤตสองรอบรากทั้งสองจะกลับมาที่เดิม  
ในกรณีของรากที่ 3 ก็คล้าย ๆ กัน

ในกรณีของพหุนามที่ซับซ้อนขึ้น รากของพหุนามนั้นอาจมีความไม่สมมาตรได้ ทฤษฎีของกาลัว นั้นคือการศึกษาการสลับที่กันของรากพหุนามเมื่อเราหมุนรอบค่าวิกฤตบางอย่าง  
ในกรณีที่รากของพหุนามสลับที่ได้แปลว่าตัวพหุนามนี้มีคุณสมบัติบางอย่างที่ไม่เปลี่ยนแปลง (invariant)

ตัวอย่างข้างบนนี้อธิบายทฤษฎีกาลัว แต่ไม่ใช่ในรูปแบบที่กาลัวคิดในตอนนั้น ในตอนที่กาลัวยังมีชีวิต เขาเคยส่งบทความไปตีพิมพ์ แต่ก็ไม่ได้รับการตอบรับ ส่วนหนึ่งก็เพราะเขาเขียนไม่เคลียร์จริง ๆ ต้องรอจนเกือบ 20 ปี หลังจากเขาเสียชีวิตจึงมีคนไปงัดงานของเขามาศึกษาและย่อยจนคนอื่นเข้าใจได้ นั่นคือคุณ Camille Jordan ในปี 1870 หลังจากนั้นก็มีนักคณิตศาสตร์อื่น เช่น Felix Klein และ Sophus Lie ที่ต่อยอดไอเดียนี้จนกลายเป็นทฤษฎีกรุ๊ป และทฤษฎีกาลัว ในปัจจุบัน

ผมหวังว่าจะเข้าใจทฤษฎีกาลัวซักวัน 555

การแข่งขันของ Académie des Sciences

ในปี 1878 Académie des Sciences ของฝรั่งเศสตั้งหัวข้อแข่งขันทางคณิตศาสตร์คือ ให้ทำให้ทฤษฎีของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเส้นตรงตัวแปรเดียว นั้นสมบูรณ์ โดยให้เลือกศึกษาบางประเด็นที่สำคัญ  
การแข่งนี้ให้เวลา 2 ปี กำหนดส่งปลายปี 1880 แบบนิรนาม และให้รางวัลเป็นเงิน 3,000 ฟรังค์ ในยุคนั้นคนงานได้ค่าแรง 5 ฟรังค์ ต่อวัน และแม่บ้านได้ 1.50 ฟรังค์ต่อวัน

คุณปวงกาเร่เองก็สนใจงานแข่งนี้เช่นกัน ในวันที่ 22 มี.ค. 1880 เขาได้ส่งผลงานเข้าแข่ง ซึ่งต่อมาวันที่ 14 มิ.ย. 1880 เขาก็ถอนผลงานนี้ออก เพราะคิดได้ว่ามันอยู่นอก scope ของงานแข่ง  
งานที่คุณปวงกาเร่ถอนออกนี้เป็นการวิเคราะห์แบบ non-linear ซึ่งก็นอก scope จริง แต่งานนี้ก็ไม่เสียเปล่า เพราะเขานำมาต่อยอดภายหลังจนกลายเป็นพื้นฐานของ system dynamic ในปัจจุบัน

เรื่องที่จะเล่านี้เกิดขึ้นในวันที่ 1 พ.ค. 1880 เมื่อคุณ Charles Hermite ที่เป็น อาจารย์ที่ปรึกษาของปวงกาเร่ เอาบทความของคุณ Fuch มาให้อ่าน เพราะเป็นภาษาเยอรมัน และปวงกาเร่รู้ภาษาเยอรมันดี และอาจจะอยากให้ปวงกาเร่ แปลให้อ่านด้วย

หลังจากปวงกาเร่อ่านพบพบว่าบทความนี้มันผิด ผิดแบบไม่มีอะไรที่ถูกเลย แต่ในระหว่างที่อ่านปวงกาเร่พบว่าหัวข้อที่บทความนี้ศึกษานั้นน่าสนใจมาก

ภายหลังในปี 1905 คุณปวงกาเร่เขียนหนังสือว่าด้วยการทำงานของเขาและย้อนกลับมาพูดถึงช่วงเดือน พ.ค. นี้ ว่าตั้งแต่เขาได้บทความมาสองสัปดาห์เต็ม เขาก็พยายามพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน ที่เขาเรียกเองว่า ฟังก์ชัน fuchienne ตามชื่อคุณ Fuch นั้นไม่มีจริง ทุก ๆ วันเขาพยายามนั่งพิสูจน์ 1–2 ชม. แต่ก็ไม่สำเร็จ  
วันหนึ่งเขานอนไม่หลับเพราะดันไปกินกาแฟดำตอนเย็น แต่ระหว่างที่พยายามนอนไอเดียต่าง ๆ ก็งอกมามากมาย จนในที่สุดในที่สุดเขาก็พบวิธีที่น่าจะใช้ได้ ในตอนเช้าเขาก็พบวิธีพิสูจน์การมีอยู่ของฟังก์ชัน fuchsienne โดยใช้ hypergeometric serie หลังจากนั้นการเขียนบทความก็ใช้เวลาไม่กี่ชั่วโมง  
29 พค. 1880 ปวงกาเร่ ส่งงานใหม่นี้ให้ Académie พิจารณา โดยใช้ชื่อแทนตัวเองว่า “Non inultus premor” ซึ่งเป็น motto ภาษาละตินของเมืองเกิดของเขาคือ Nancy

งานใหม่ของคุณปวงกาเร่นี้เขียนขึ้นอย่างรวดเร็วจริง ดังนั้นจึงเต็มไปด้วย error ทั้งการสะกดและ grammar โดยเขาเขียนขอโทษเพราะมีเวลาเขียนน้อย อันนี้ขำดี เพราะ deadline จริง ๆ มันปลายปี นั่นคือเขามีเวลาอีก 6 เดือน แต่ท่าทางคุณปวงกาเร่เป็นพวกรีบคิดรีบทำเลยเขียนเสร็จแล้วส่งทันที

Non inultus premor

สิ่งที่ปวงกาเร่เลือกศึกษาคือคุณสมบัติกาลัว ของสมการอนุพันธ์

idea หลักคือสมการอนุพันธ์เช่น (dy/dx) = y/(3x) มีคำตอบง่าย ๆ คือ y=∛x (y เป็นรากที่ 3 ของ x)  
ในยุคนั้น x และ y ในสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อนนะ

ตรงนี้เท่าที่เข้าใจคือ เรามีปัญหาเมื่อ x=0 ดังนั้นให้ตัด x=0 ออกไปก่อน ลองแก้สมการให้ได้เซตคำตอบ จากนั้นให้หมุนรอบจุดวิกฤต ก็คือ x=0 และดูว่าเซตคำตอบ เปลี่ยนไปเช่นไร ในตัวอย่างนี้ถ้าเราหมุนสามรอบเราจะกลับมาที่เซตเดิม  
เราสามารถสร้างกรุ๊ปการแปลงจากการหมุนทั้งสามนี้ได้  
กาลัวบอกว่าความกำกวมของคำตอบทั้งสามนั้นอธิบายได้จากการที่ อินเวิร์สของคำตอบ ซึ่งก็คือ x³ นั้น invariant จากกรุ๊ปของการหมุนนี้

คำถามที่ปวงกาเร่สนใจคือในกรณีของสมการอนุพันธ์เส้นตรงทั่วไป อินเวิร์สของคำตอบของมันจะมีลักษณะ invariant เมื่อเทียบกับกรุ๊ปของการแปลงอะไรที่น่าสนใจมั๊ย

ปวงกาเร่เลือกตัวอย่างสมการอนุพันธ์ข้างล่างมาศึกษา  
ซึ่งจริง ๆ แล้วสมการนี้ถูกศึกษามาก่อนแล้วโดย นักคณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น Gauss, Euler และ Riemann แต่ปวงกาเร่ไม่รู้ คงเพราะเขาไม่ค่อยอ่านจริง ๆ ดูเหมือนเขาเลือกตามคุณ Fuch  
ในงานนี้ปวงกาเร่เริ่มจากอธิบายปัญหาในงานของคุณ Fuch ว่าทำไรผิดบ้าง จากนั้นเสนอบทวิเคราะห์ของตัวเอง

ในสมการนี้ปัญหาอยู่ที่จุด 0 และ 1 ซึ่งในกรณีนี้เมื่อเขาตัดจุดวิกฤตทั้งสองออก หาคำตอบ และหมุนรอบจุดวิกฤตขอบเขตระหว่างเซตคำตอบนั้นไม่ใช่เส้นตรงเหมือนกรณี x³ แล้ว แต่เป็นเส้นยึกยือที่เขาเรียกว่า “mixtiligne” และวาดด้วยมือให้ดู (รูปล่างซ้าย)  
ปวงกาเร่เรียกอินเวิร์สของฟังก์ชันคำตอบสมการอนุพันธ์นี้ว่าฟังก์ชัน fuchienne (น่าจะเป็นการไถ่โทษที่สับงานคุณ Fuch ซะเละ)  
ปวงกาเร่เชื่อว่าฟังก์ชัน fuchsienne นี้จะประกอบขึ้นมาเป็นวงกลมแบบในรูปล่างขวา (เหมือนกันตรงไหนหว่า 555) ซึ่งในงานที่เขาส่งนี้ไม่ได้มีบทพิสูจน์ครบ หลายอย่างเป็นเพียง claim เท่านั้น

Non-Euclidean geometry

เดือน มิ.ย. หลังจากส่งงานไปแล้ว ปวงกาเร่ไปทัศนศึกษากับ École des Mines ซึ่งการเดินทางก็เหนื่อยอยู่ทำให้เขาไม่มีเวลามาคิดเรื่องคณิตศาสตร์ระหว่างเดินทาง ปวงกาเร่บอกว่าพอไปถึงเมือง Coutances ขณะที่เขากำลังขึ้นรถไปเที่ยวต่อ อยู่ ๆ ก็เขาก็คิดได้ว่ากรุ๊ปของการแปลงที่เขาใช้ในการนิยามฟังก์ชัน fuchsienne นั้นคือกรุ๊ปใน non-euclidean geometry

หมายเหตุ เรขาคณิตที่เราเรียนกันมีพื้นฐานมาจากงานของคุณยูคลิด (Euclid) ซึ่งได้วางสัจพจน์ (postulate) ไว้ 5 ข้อคือ

เราสามารถสร้างส่วนของเส้นตรงได้จากการลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุด

เราลากส่วนของเส้นตรงออกไปเป็นเส้นตรงได้โดยไม่สิ้นสุด

เราสามารถสร้างวงกลมจากส่วนของเส้นตรงได้โดยยึดปลายหนึ่งเป็นจุดศูนย์กลางและให้ตัวมันเองเป็นรัศมี

มุมฉากใด ๆ ล้วนไม่แตกต่างกัน

ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกับเส้นที่สาม และผลรวมของมุมด้านหนึ่งน้อยกว่า 2 มุมฉากแล้ว เส้นตรงทั้งสองจะตัดกันเสมอ

ข้อ 5 นี่ค่อนข้างวุ่นวาย แต่หลัก ๆ แล้วมันทำให้เกิดนิยามของเส้นขนาน และคุณสมบัติที่ว่าผลมุมรวมภายในของสามเหลี่ยมใด ๆ เท่ากับ 180 องศา

ตั้งแต่อดีตมีนักคณิตศาสตร์หลายคนที่สงสัยว่า postulate ข้อ 5 นี้จำเป็นหรือไม่ และพยายามลองพิสูจน์มันจาก postulate ข้ออื่น แต่ไม่เห็นผล จนมาถึงต้นศตวรรษที่ 19 ที่มีนักคณิตศาสตร์อย่าง Gauss, Bolyai และ Lobachevsky ได้เสนอเรขาคณิตแบบอื่นที่ postulate ข้อ 5 ของยูคลิดไม่จริง และพิสูจน์ว่าเรขาคณิตที่ได้นี้มันก็ยัง make sense อยู่

ปวงกาเร่อธิบายเรื่อง non-euclidean geometry นี้ว่า ให้ลองจินตนาการถึงโลกบนแผ่น disc วงกลม โดยในโลกนี้อุณหภูมิสูงอยู่ที่ตรงกลางและค่อย ๆ ลดลงเป็น 0 องศาสัมบูรณ์ที่ขอบ ให้เวลาและความยาวในโลกนี้เปลี่ยนไปตามอุณหภูมิ ดังนั้นเมื่อเราเคลื่อนที่ไปทางขอบ ขนาดของเราจะเล็กลง แต่ในเมื่อไม้บรรทัดที่เราใช้วัดมันก็เล็กลงเช่นกัน ดังนั้นคนในโลกนี้ก็จะไม่รู้ตัวว่าตัวเองเล็กลง ขนาดทุกอย่างยังคงเป็นเหมือนในศูนย์กลางวงกลม  
และเมื่ออุณหภูมิลดลงเรื่อย ๆ เราก็จะเคลื่อนที่ช้าลง ที่ขอบมีอุณหภูมิ 0 องศาสัมบูรณ์ แปลว่าทุกอย่างจะหยุดนิ่ง ถ้าคนบนโลกนี้จะเดินทางไปยังขอบโลก เขาก็จะช้าลงเรื่อย ๆ และไปไม่ถึงซักที แต่ในเมื่อเวลาเองก็ช้าลงเช่นกัน ดังนั้นนักเดินทางจะไม่รู้ตัวว่าตัวเองกำลังจะหยุด เขาจะรู้สึกเหมือนกำลังเคลื่อนที่ไปเรื่อย ๆ นั่นเอง  
เรขาคณิตที่ใช้อธิบายโลกนี้ก็คือ non-euclidean geometry นั่นเอง

สิ่งที่คุณปวงกาเร่คิดได้คือเจ้า mixtiligne เล็ก ๆ ที่เขานั่งวาดที่มันเล็กลงเรื่อย ๆ นั้น จริง ๆ แล้วมันเล็กลงเพราะการแปลงในแบบ non-euclidean เหมือนกับคนในโลกข้างบนที่เดินไปยังขอบ  
นั่นคือ non-euclidean geometry ดูจะเป็นกรอบการทำงานที่เหมาะสมสำหรับสมการอนุพันธ์นั่นเอง

ฤดูร้อน 1880 ปวงกาเร่พยายามศึกษาเรื่อง non-euclidean geometry เพิ่มแต่ก็ไม่ได้ผลลัพธ์อะไรน่าสนใจ เลยไปพักร้อน ระหว่างที่เดินเล่นริมหน้าผาเขาก็ฉุกคิดได้เรื่องความสัมพันธ์ระหว่าง non-euclidean geometry และ quadratic form บางแบบ  
เมื่อกลับมา Caen เขาก็ยังคิดต่อและพบว่าจากความสัมพันธ์นี้เราสามารถสร้างฟังก์ชัน fuchsienne ด้วยวิธีอื่นที่ไม่ใช่ hypergeometric serie ได้ด้วย แต่ยังพิสูจน์ไม่ได้  
ภายหลังในขณะที่เขากำลังข้ามถนนไปทำงาน ก็พลันคิดได้ถึงวิธีพิสูจน์ ซึ่งเขาก็ใช้เวลาไม่นาน (อีกแระ) ในการเขียน และส่งเพิ่มไปเป็น suplement ในวันที่ 6 ก.ย. 1880

Suppléments

ในงานที่เขาส่งไปเพิ่มนี้เป็นการทำงานกลับข้างกัน แทนที่จะเริ่มจากสมการอนุพันธ์ ปวงกาเร่เริ่มจากเซตของคำตอบ  
ปวงกาเร่เริ่มจากการสร้าง polygon ใน disc วงกลม ในระนาบ non-euclidean และใช้คุณสมบัติความสมมาตรในการเติม disc นี้ให้เต็ม

หลังจากนั้นเขาสร้างฟังก์ชัน fuchsienne บน disc นี้ที่ invariant เมื่อเทียบกับการย้ายตำแหน่งบน disc นี้ จากนั้นจึงพิสูจน์ว่าฟังก์ชันที่เขาสร้างนี้เป็นไปตามที่สมการอนุพันธ์ต้องการ

งานนี้เป็นการรวมเอาสมการอนุพันธ์ และ กรุ๊ปของการแปลงแบบ non-euclidean ไว้ด้วยกัน ซึ่งคุณปวงกาเร่ดีใจมากเลยรีบ submit ไปในวันที่ 6 ก.ย. 1880

ปัญหาที่ค้างอยู่คือ ปวงกาเร่เสนอสมการอนุพันธ์ที่สร้างจากฟังก์ชัน fuchsienne และเรขาคณิต non-euclidean แต่เขายังบอกไม่ได้ว่ามันครอบคลุมสมการอนุพันธ์ทั้งหมดแล้วหรือไม่ หรือถ้าเราเริ่มจากสมการอนุพันธ์เราควรจะทำอย่างไร  
ปี 1880 กำลังจะจบ คุณปวงกาเร่มีเวลาไม่พอในการพิสูจน์จึงส่ง troisième supplément ในวันที่ 20 ธ.ค. 1880 ไปเพื่ออธิบายสิ่งที่เขาตั้งใจจะทำต่อ

1881

ถึงแม้ว่าปวงกาเร่จะส่งงานไปแล้ว แต่เขาก็ยังคิดต่อ  
ตามที่เพื่อนของเขาคุณ Lecornu ที่เป็นเพื่อนสมัย Polytechnique คือในงานเลี้ยงสิ้นปีที่บ้านเขา คุณปวงกาเร่ได้รับเชิญไปด้วย ปวงกาเร่ใจลอยทั้งงาน เดินไปมา ใครถามก็ตอบผ่าน ๆ ไป จนเที่ยงคืน เพื่อนเดินมาบอกว่าปีใหม่แล้ว ปวงกาเร่เหมือนจะรู้ตัวแล้วก็ขอตัวกลับบ้าน  
ผ่านไปไม่กี่วันเมื่อ Lecornu เจอปวงกาเร่อีกครั้งที่ท่าเรือเมือง Caen คุณปวงกาเร่หันมาบอกเขาว่า “ตอนนี้ผม integrate สมการอนุพันธ์ทั้งหมดได้แล้ว”

ก.พ. 1881 ผลการแข่งขันออกมา ปวงกาเร่ไม่ชนะ คนชนะคือ Halphen  
ส่วนปวงกาเร่ได้แค่คำชมของกรรมการ  
อย่างไรก็ดีในปีนี้ปวงกาเร่ก็ยังตีพิมพ์ผลงานเกี่ยวกับฟังก์ชัน fuchsienne อีก 18 บทความ ในช่วงนี้ปวงกาเร่ยังทำงานอื่นด้วย

หลังจากจบการแข่งขันปวงกาเร่ก็ได้เอางานที่ส่งมาตีพิมพ์ การแข่งนั้นเป็นแบบ anonymous ดังนั้นไม่มีใครรู้ว่าใครเป็นคนส่งมา กรรมการเองก็ไม่รู้  
หลังจากตีพิมพ์ เดือน มิ.ย. ปวงกาเร่ก็ได้รับจดหมายจาก เฟลิกซ์ ไคลน์ (Felix Klein) ที่ต่อว่าเล็กน้อยว่าทำไมไม่ cite คนอื่นที่ศึกษามาก่อนอย่าง Gauss, Riemann หรือคไลน์เอง  
จดหมายนี้เป็นจุดเริ่มต้นของการแลกเปลี่ยนความรู้ระหว่างปวงกาเร่และไคลน์ที่ยาวถึง 26 ฉบับ ในการคุยกันนี้ปวงกาเร่เหมือนเป็นศิษย์ที่สอบถามเรื่องที่เขาไม่รู้และไคลน์ก็เป็นอาจารย์ที่ถ่ายทอดสิ่งที่เขารู้แก่ปวงกาเร่ และการแลกเปลี่ยนนี้นำไปสู่สิ่งที่เรียกว่า method of continuity ซึ่งเขานำไปใช้ภายหลังอีก

นอกจากนี้ปวงกาเร่ยังได้เสนอ idea ที่เหนือความคาดหมายของไคลน์อีกคือการบิด (deform) กรุ๊ป fuchsien จนกว่าจะตรงกับสมการอนุพันธ์ที่เขาต้องการ

หลังจากที่ปวงกาเร่อธิบาย idea นี้ให้ไคลน์ฟัง ไคลน์ยังดูไม่ค่อยเชื่อ หนึ่งจุดที่ไคลน์ท้วงนั้นเกี่ยวกับจุดตัดของวงกลมทั้งหลายในระนาบ  
ถัดมาอีก 3 วันปวงกาเร่ส่งจดหมายมาใหม่โดยบอกว่าเขาได้เอาจุดนั้นมาคิดแล้ว และเสนอกรุ๊ปใหม่เรียกว่า กรุ๊ป kleinnéen เพื่อให้เกียรติ์คไลน์ ปวงกาเร่ตีความกรุ๊ป kleinnéen ว่าเป็น non-euclidean geometry ใน 3 มิติ ไม่ใช่บนระนาบแบนเหมือนกรุ๊ป fuchsien

วันที่ 8 ส.ค. 1881 ปวงกาเร่ ตีพิมพ์บทสรุปผลงานของเขาทั้งหมดเรื่องฟังก์ชัน fuchsienne ในช่วงปีที่ผ่านมา  
ซึ่งผลลัพธ์บางส่วนในบทความก็ถูกพิสูจน์ หรือทำให้สมบูรณ์ภายหลัง ทั้งโดยปวงกาเร่เอง และจากการทำงานร่วมกับคไลน์  
นอกจากนี้ทั้งปวงกาเร่และคไลน์ยังได้แข่งกันตีพิมพ์เรื่องนี้ต่ออีกยาว ภายหลังปวงกาเร่สรุปผลงานในช่วง 1882–1884 ออกมาเป็นบันทึก (memoire) อีก 5 ฉบับ และก็หันไปทำเรื่องอื่น  
ในปี 1907 ปวงกาเร่กลับมาดูเรื่องนี้ต่อและพิสูจน์ทฤษฎีบทสำคัญที่เรียกว่า uniformization theorem ได้พร้อม ๆ กับ Paul Koebe